Über die Konvergenz der Orthogonalreihen

Von KÁROLY TANDORI in Szeged

Herrn Professor Béla Szőkefalvi-Nagy zum 50. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Für jede endliche Folge $c_1, \ldots, c_N$ von reellen Zahlen setzen wir

$$I(c_1, \ldots, c_N) = \sup \int_0^1 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)|\big)^2 \, dx,$$

wobei das Supremum für alle im Intervall [0, 1] orthonormierten Funktionensysteme $\{\varphi_n(x)\}$ $(n=1, \ldots, N)$ gebildet wird. Offensichtlich hängt $I(c_1, \ldots, c_N)$ nur von den von Null verschiedenen Gliedern der Folge $\{c_n\}$ ab, und zwar stetig.

Satz I. *Sei $\{a_n\}_1^\infty$ eine gegebene Folge von reellen Zahlen. Gilt*

$$\text{(1)} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} I(a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_{k+1}}) < \infty$$

für jede Indexfolge $(0=)n_0 < \ldots < n_k < \ldots$, so konvergiert die Reihe

$$\text{(2)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall. Gilt aber (1) *für eine Indexfolge nicht, so gibt es ein orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$, für welches die Reihe* (2) *sogar fast überall divergiert. Insbesondere ist also das Bestehen von* (1) *für jede Indexfolge notwendig und hinreichend dafür, daß die Reihe* (2) *für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert.*

Für die Funktion I gibt es keine explizite Darstellung, wohl aber verschiedene Abschätzungen. Aus dem klassischen Resultat von MENCHOFF und RADEMACHER[1])

---

[1]) D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales (Première partie), *Fundamenta Math.*, 4 (1923), 82–105; H. RADEMACHER, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, *Math. Annalen*, 87 (1922), 112–138.

folgt leicht die obere Abschätzung:

$$I(c_1, \dots, c_N) = O(1) \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \log^2 (n+1),$$

woraus man, auf Grund von Satz I, den klassischen Satz von MENCHOFF und RADEMACHER[2]) bekommt, daß im Falle $\sum a_n^2 \log^2 n < \infty$ die Reihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert.

Da

$$|c_1 \varphi_1(x) + \dots + c_N \varphi_N(x)| \leqq \max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \dots + c_j \varphi_j(x)|$$

gilt, besteht die untere Abschätzung

$$c_1^2 + \dots + c_N^2 \leqq I(c_1, \dots, c_N).$$

Verfasser[3]) hat eine feinere untere Abschätzung angegeben:

$$I(c_1, \dots, c_N) \geqq \varrho \sum_{n=1}^{N} c_n^2 \lambda_n(c_1, \dots, c_N) \qquad (\varrho > 0)$$

mit

$$\lambda_i(c_1, \dots, c_N) = \begin{cases} (\log (c_1^2 + \dots + c_N^2) - \log c_i^2)^2, & \text{wenn} \quad c_1^2 + \dots + c_N^2 \geqq 8c_i^2 > 0, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auf Grund dieser Abschätzung folgt aus dem Satz I leicht, daß $\sum a_n^2 \log^2 1/a_n^2 < \infty$ mit $a_n \neq 0$ und $a_n \to 0$ notwendig dafür ist, damit die Reihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert[4]).

Es sei $(0=)m_0 < \dots < m_k < \dots$ eine gegebene Indexfolge. Wir setzen

$$A_k = \{a_{m_k+1}^2 + \dots + a_{m_{k+1}}^2\}^{1/2} \qquad (k = 0, 1, \dots).$$

Satz II. *Das Bestehen der Bedingung*

$$\sum_{k=0}^{\infty} I(A_{n_k+1}, \dots, A_{n_{k+1}}) < \infty \tag{3}$$

für jede Indexfolge $0 = n_0 < \dots < n_k < \dots$ ist hinreichend dafür, daß die Folge der m_k-ten Partialsummen von (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überal konvergiert. Gilt aber (3) für eine Indexfolge nicht, so gibt es ein orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$, für welches die Folge der m_k-ten Partialsummen der Reihe (2) sogar fast überall divergiert. Insbesondere ist also das Bestehen von (3) für jede Indexfolge $\{n_k\}$ notwendig und hinreichend dafür, daß die m_k-ten Partialsummen der Reihe (2) für jedes Orthonormalsystem fast überall konvergieren.

Es sei $T = \|c_{i,j}\|$ eine Matrix mit

$$\lim_{i\to\infty} c_{i,j} = 0 \ (j = 1, 2, \dots) \quad \text{und} \quad \lim_{i\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c_{i,j} = 1,$$

weiterhin nehmen wir an, daß die T-Summierbarkeit der Orthogonalreihe (2) für

---

[2]) Siehe loc. cit. 1).

[3]) K. TANDORI, Über die Divergenz der Orthogonalreihen, *Publicationes Math. Debrecen*, **8** (1961), 291–307.

[4]) Siehe loc. cit. 3).

eine beliebige Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ $\left(\sum a_n^2 < \infty\right)$ und für ein beliebiges orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ mit der Konvergenz der Folge der m_k-ten Partialsummen fast überall äquivalent ist. Es gilt dann die folgende Behauptung:

Damit die Reihe (2) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall T-summierbar ist, ist es notwending und hinreichend, daß die Bedingung* (3) *für jede Indexfolge* $\{n_k\}$ *gilt.*

Ist nämlich (3) für jede Indexfolge $\{n_k\}$ erfüllt, so konvergiert die Folge der m_k-ten Partialsummen der Reihe (2) fast überall. Aus (3) folgt also $\sum a_n^2 < \infty$ und auf Grund unserer Annahme über das Summationsverfahren T ergibt sich, daß die Reihe (2) fast überall T-summierbar ist. Ist aber (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall T-summierbar, so ist $\sum a_n^2 < \infty$. Im Falle $\sum a_n^2 = \infty$ ist nämlich die Rademachersche Reihe $\sum a_n r_n(x)$ fast überall nicht T-summierbar[5]). So folgt aus unserer Annahme über das Verfahren T, daß die Folge der m_k-ten Partialsummen der Reihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergiert und so besteht (3) auf Grund des Satzes II.

Nach den Sätzen von KOLMOGOROFF[6]) und KACZMARZ[7]) ist die $(C, 1)$-Summierbarkeit der Reihe (2) für eine beliebige Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ $\left(\sum a_n^2 < \infty\right)$ und für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ mit der Konvergenz der Folge der 2^m-ten Partialsummen fast überall äquivalent. Also gilt die folgende Behauptung:

Damit die Reihe (2) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *fast überall* $(C, 1)$-*summierbar ist, ist es notwendig und hinreichend, daß die Bedingung*

$$\sum_{k=0}^{\infty} I(\bar{A}_{n_k+1}, \dots, \bar{A}_{n_{k+1}}) < \infty \tag{4}$$

für jede Indexfolge $(0=)n_0 < \dots < n_k < \dots$ *erfüllt wird, wobei*

$$\bar{A}_m = \{a^2_{2^m+1} + \dots + a^2_{2^{m+1}}\}^{1/2} \qquad (m=0, 1, \dots)$$

gesetzt wird.

Offensichtlich können ähnliche Sätze auch für andere Summationsverfahren, z. B. für die Rieszsche Summation bewiesen werden. Mit Anwendung der erwähnten Abschätzungen folgen aus Satz II einige bekannte Sätze über die $(C, 1)$-Summierbarkeit der Orthogonalreihen.[8])

Da aus Bedingung (1) insbesondere

$$\sum a_n^2 < \infty$$

folgt, so konvergiert die Reihe (2) jedenfalls im quadratischen Mittel gegen eine Funktion $f(x)$. Wir wählen eine Indexfolge derart, daß

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=n_k+1}^{\infty} a_n^2 < \infty$$

---

5) A. ZYGMUND, On the convergence of lacunary trigonometric series, *Fundamenta Math.*, **16** (1930), 90–107.

6) A. N. KOLMOGOROFF, Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier, *Fundamenta Math.*, **5** (1924), 96–97.

7) S. KACZMARZ, Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen, *Math. Zeitschrift*, **26** (1927), 99–105.

8) Siehe z. B. D. MENCHOFF, Sur les séries de fonctions orthogonales. Deuxième partie, *Fundamenta Math.*, **8** (1926), 56–108.; S. KACZMARZ, loc. cit. 7); K. TANDORI, loc. cit. 3).

besteht. Dann ist

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 (f(t) - s_{n_k}(t))^2 \, dt < \infty,$$

wobei $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der Reihe (2) bezeichnet. Hieraus, auf Grund des Satzes von B. LEVI folgt, daß die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} (f(x) - s_{n_k}(x))^2$$

fast überall konvergiert. Die positive Quadratwurzel der Summe dieser Reihe bezeichnen wir mit $F(x)$. Also ist $F(x)$ quadratisch integrierbar; ihr Quadratintegral hängt offenbar nur von den Koeffizienten a_n ab. Aus (1) folgt, daß die Funktion

$$G(x) = \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \left(\max_{n_k < i \leqq j \leqq n_{k+1}} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)| \right)^2 \right\}^{1/2}$$

quadratisch integrierbar ist; ihr Quadratintegral hängt nur von den Koeffizienten a_n ab. Es sei n ein beliebiger Index und $n_k < n \leqq n_{k+1}$. Da offenbar

$$|s_n(x)| \leqq |f(x)| + |s_{n_k}(x) - f(x)| + |s_n(x) - s_{n_k}(x)| \leqq |f(x)| + F(x) + G(x)$$

gilt, so ergibt sich auf Grund des Satzes I Folgendes: ist die Bedingung (1) erfüllt, so konvergiert die Reihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ „beschränkt", d. h. konvergiert fast überall und die Partialsummen bleiben im absoluten Betrag unterhalb einer nur von dem System $\{\varphi_n(x)\}$ abhängigen, quadratisch integrierbaren Funktion; das Quadratintegral dieser Funktion bleibt unterhalb einer nur von den Koeffizienten a_n abhängigen Konstante.

Also gilt auch die folgende Behauptung:

Satz III. *Die Konvergenz fast überall der Orthogonalreihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ ist mit ihrer beschränkten Konvergenz für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ gleichwertig.*

Nach der Definition von $I(c_1, \ldots, c_N)$ gilt $I(\pm c_1, \ldots, \pm c_N) = I(c_1, \ldots, c_N)$ und $I(c_1 + d_1, \ldots, c_N + d_N) \leqq 2I(c_1, \ldots, c_N) + 2I(d_1, \ldots, d_N)$. Es sei $c_1', \ldots, c_N'$ eine Folge, die sich aus $c_1, \ldots, c_N$ so ergibt, daß einige der c_i gleich 0 gesetzt werden. Auf Grund der obigen Bemerkungen folgt die Ungleichung $I(c_1', \ldots, c_N') \leqq 4I(c_1, \ldots, c_N)$. Daraus, auf Grund des Satzes I folgt

Satz IV. *Ist die Reihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergent, so ist jede Teilreihe von (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall konvergent.*

Es soll aber bemerkt werden, daß aus der Konvergenz von (2) fast überall für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ die unbedingte Konvergenz von (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ nicht folgt. Es kann nämlich eine Koeffizientenfolge $\{a_n\}$ mit $a_n^2 \geqq a_{n+1}^2$

$$\sum a_n^2 \log^2 n < \infty \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\sum_{n=2^{2^\nu}+1}^{2^{2^{\nu+1}}} a_n^2 \log^2 n \right]^{1/2} = \infty$$

angegeben werden. Auf Grund der zweiten Bedingung existiert ein orthonormiertes System $\{\varphi_n(x)\}$ derart, daß die Reihe (2) in gewisser Anordnung ihrer Glieder fast überall divergiert[9]), und wegen der ersten Bedingung konvergiert der Reihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ fast überall[10]).

Die n-te $(C, 1)$-Mittel der Orthogonalreihe (2) bezeichnen wir mit $\sigma_n(x)$, d. h.

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) a_k \varphi_k(x).$$

Offensichtlich ist die Konvergenz bzw. die beschränkte Konvergenz der Folge der 2^m-ten Partialsummen der Orthogonalreihe (2) mit der Konvergenz bzw. mit der beschränkten Konvergenz der Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} \bar{A}_m \Phi_m(x) \tag{5}$$

äquivalent, wobei

$$\Phi_m(x) = \bar{A}_m^{-1}\left(a_{2^m+1}\varphi_{2^m+1}(x) + \ldots + a_{2^{m+1}}\varphi_{2^{m+1}}(x)\right) \qquad (m=0, 1, \ldots)$$

gesetzt wird. (Ist $\bar{A}_m = 0$, so soll man statt $\bar{A}_m^{-1}$ z. B. 1 setzen.) Ist (4) erfült, so erhalten wir — wie oben — daß die Partialsummen der Reihe (5), also die 2^m-ten Partialsummen der Reihe (2), beschränkt konvergieren; also gibt es eine quadratisch integrierbare Funktion $H(x)$ mit

$$|s_{2^m}(x)| \leqq H(x) \qquad (m=0, 1, \ldots).$$

Wegen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \int_0^1 (s_{2^m}(x) - \sigma_{2^m}(x))^2\, dx \leqq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}} \sum_{k=1}^{2^m} a_k^2 k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$$

ist

$$M(x) = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (s_{2^m}(x) - \sigma_{2^m}(x))^2 \right\}^{1/2} \in L^2.$$

Durch einfache Rechnung erhalten wir weiterhin:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \int_0^1 (\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x))^2\, dx \leqq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 k^2 = O(1) \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty;$$

es besteht also auch

$$N(x) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sigma_{n+1}(x) - \sigma_n(x)\right)^2 \right\}^{1/2} \in L^2.$$

---

[9]) K. Tandori, Über die orthogonalen Funktionen. X (Unbedingte Konvergenz), *Acta Sci. Math.*, **23** (1962), 185–221.

[10]) D. Menchoff, loc. cit. 1); H. Rademacher, loc. cit. 2).

Es sei n ein beliebiger Index und $2^m < n < 2^{m+1}$. Dann ist

$$|\sigma_n(x) - \sigma_{2^m}(x)| = \left| \sum_{k=2^m}^{n-1} (\sigma_{k+1}(x) - \sigma_k(x)) \right| \leqq$$

$$\leqq \left\{ \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} \frac{1}{k} \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}-1} k(\sigma_{k+1}(x) - \sigma_k(x))^2 \right\}^{1/2} \leqq \sqrt{2} N(x).$$

Nach den Obigen gilt

$$|\sigma_n(x)| \leqq |s_{2^m}(x)| + |\sigma_{2^m}(x) - s_{2^m}(x)| + |\sigma_{2^m}(x) - \sigma_n(x)| \leqq$$
$$\leqq H(x) + M(x) + \sqrt{2} N(x) \in L^2.$$

Ist also die Bedingung (4) erfüllt, so ist die Orthogonalreihe (2) beschränkt $(C, 1)$-summierbar. Damit haben wir auch die folgende Behauptung bewiesen:

Satz V. *Die $(C, 1)$-Summierbarkeit fast überall der Reihe (2) für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ ist mit ihrer beschränkten $(C, 1)$-Summierbarkeit für jedes orthonormierte System $\{\varphi_n(x)\}$ äquivalent.*

Offensichtlich kann ein ähnlicher Satz auch für andere Summationsverfahren, z. B. für die Rieszsche Summation bewiesen werden.

§ 1. Beweis des Satzes I

Hinlänglichkeit. Wie schon bemerkt wurde, aus (1) folgt, mit Anwendung des Satzes von Riesz—Fischer, daß es eine Indexfolge $\{n_k\}$ derart gibt, daß die Folge $\{s_{n_k}(x)\}$ fast überall konvergiert. Aus (1) folgt weiterhin

$$\delta_k(x) = \max_{n_k < i \leqq j \leqq n_{k+1}} |a_i \varphi_i(x) + \ldots + a_j \varphi_j(x)| \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

fast überall. Es sei $n_k < n < n_{k+1}$. Dann ist also

$$|s_n(x) - s_{n_k}(x)| \leqq \delta_k(x) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

fast überall. Damit haben wir die Hinlänglichkeit der Bedingung (1) bewiesen.

Mit derselben Methode kann auch die folgende Behauptung bewiesen werden: *Ist für eine Indexfolge $\mu_0 < \ldots < \mu_k < \ldots$ die Folge $\{s_{\mu_k}(x)\}$ fast überall konvergent und besteht*

$$\sum_{k=0}^{\infty} I(a_{\mu_k+1}, \ldots, a_{\mu_{k+1}}) < \infty,$$

so ist die Reihe (2) fast überall konvergent.

Notwendigkeit. Zum Beweis benötigen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. *Für jede Folge $c_1, \ldots, c_N$ mit $c_1^2 + \ldots + c_N^2 > 0$ gibt es ein in $[0, 1]$ orthonormiertes und von der Folge $\{c_n\}$ abhängiges System von Treppenfunktionen $\psi_1(x), \ldots, \psi_N(x)$ derart, daß*

$$\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \psi_i(x) + \ldots + c_j \psi_j(x)| \geqq 1$$

in einem Intervall $E(\subseteqq [0, 1])$ *mit*

$$\operatorname{mes}(E) \geqq \alpha I(c_1, \ldots, c_N)$$

gilt, wobei α *eine positive, absolute Konstante ist.*

Beweis des Hilfssatzes. Nach der Definition von $I(c_1, \ldots, c_N)$ gibt es ein orthonormiertes System $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)$, für welches

$$\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \varphi_i(x) + \ldots + c_j \varphi_j(x)|\Big)^2 dx \geqq \frac{1}{2} I(c_1, \ldots, c_N) \tag{6}$$

gilt. Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen $\chi_1(x), \ldots, \chi_N(x)$ mit

$$\int_0^1 (\varphi_i(x) - \chi_i(x))^2 dx \leqq \varepsilon \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

Wir setzen

$$\alpha_{i,j} = \int_0^1 \chi_i(x) \chi_j(x)\, dx \qquad (i, j = 1, \ldots, N)$$

und

$$\sum_{l=1}^{i-1} |\alpha_{l,i}| + \sum_{l=i+1}^{N} |\alpha_{l,i}| = \eta_i \qquad (i = 1, \ldots, N).$$

Bei genügend kleinem ε gelten nach (6) offenbar:

$$\int_0^1 \Big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i \chi_i(x) + \ldots + c_j \chi_j(x)|\Big)^2 dx \geqq \frac{1}{8} I(c_1, \ldots, c_N), \tag{7}$$

$$\int_0^1 \left(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} \left| c_i \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha_{i,i} + \eta_i}}\right) \chi_i(x) + \ldots + c_j \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\alpha_{j,j} + \eta_j}}\right) \chi_j(x) \right|\right)^2 dx \leqq \frac{1}{16} I(c_1, \ldots, c_N). \tag{8}$$

Wir definieren ein in [0, 2] orthogonales System von Treppenfunktionen $\bar{\chi}_1(x), \ldots, \bar{\chi}_N(x)$ folgenderweise. Wir teilen das Intervall (1, 2] in $N(N-1)$ Teilintervalle $I_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, N;\ i \neq j)$ von gleicher Länge ein und setzen:

$$\bar{\chi}_i(x) = \begin{cases} \chi_i(x), & x \in [0, 1], \\ [2^{-1} N(N-1) |\alpha_{l,i}|]^{1/2}, & x \in I_{i,l} \quad (l = 1, \ldots, N;\ l \neq i), \\ -[2^{-1} N(N-1) |\alpha_{l,i}|]^{1/2} \operatorname{sign} \alpha_{l,i} & x \in I_{l,i} \quad (l = 1, \ldots, N;\ l \neq i) \end{cases}$$

$(i = 1, \ldots, N)$. Wegen

$$\int_0^2 \bar{\chi}_i^2(x)\, dx = \int_0^1 \chi^2(x)\, dx + \sum_{l=1}^{i-1} |\alpha_{l,i}| + \sum_{l=i+1}^{N} |\alpha_{l,i}| = \alpha_{i,i} + \eta_i$$

bilden die Treppenfunktionen

$$\bar{\varphi}_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{i,i}+\eta_i}}\,\bar{\chi}_i(x) \qquad (i=1, \dots, N)$$

ein orthonormiertes System in $[0, 2]$, für welches wegen (7) und (8) gilt:

(9) $$\int_0^2 \big(\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\bar{\varphi}_i(x)+\dots+c_j\bar{\varphi}_j(x)|\big)^2\, dx \geqq \frac{1}{16} I(c_1, \dots, c_N).$$

$F(x)=\max_{1 \leqq i \leqq j \leqq N} |c_i\bar{\varphi}_i(x)+\dots+c_j\bar{\varphi}_j(x)|$ ist eine Treppenfunktion: sie nimmt auf den nacheinander folgenden Intervallen $I_1, \dots, I_\varrho$ konstante Werte, etwa $w_1, \dots, w_\varrho$ an. Es sei

$$\sum_{r=1}^{\varrho} w_r^2 \operatorname{mes}(I_r) = A;$$

ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $A \leqq 2$ annehmen. Wir setzen

$$u_0=0,\ u_r=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{r} w_s^2 \operatorname{mes}(I_s) \qquad (r=1, \dots, \varrho)$$

und

$$\psi_i(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{w_{r+1}}\,\bar{\varphi}_i\left(\dfrac{2}{w_{r+1}^2}(x-u_r)+\sum\limits_{s=1}^{r}\operatorname{mes}(I_s)\right), & x\in[u_r, u_{r+1}),\ w_r\neq 0,\ r=0, 1, \dots, \varrho-1, \\ 0 \text{ sonst in } [0, 1] \end{cases}$$

$(i=1, \dots, N)$. Offensichtlich genügen diese Funktionen $\psi_i(x)$ und das Intervall $E=[0, u_\varrho]$ allen den gestellten Bedingungen.

Damit haben wir den Hilfssatz bewiesen.

Ist die Bedingung (1) nicht erfüllt, so gibt es eine Indexfolge $(0=)n_0<\dots<n_k<\dots$, für die

(10) $$\sum_{k=0}^{\infty} I(a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}})=\infty$$

ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $I(a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}})>0$, d. h. $a_{n_k+1}^2+\dots+a_{n_{k+1}}^2>0$ angenommen werden.

Durch Induktion werden wir ein in $[0, 1]$ orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ und eine Folge von einfachen (d. h. als Vereinigung endlich vieler Intervalle entstehenden) Mengen $E_k (\subseteqq [0, 1])$ definieren mit den folgenden Eigenschaften:

a) die Mengen E_k sind stochastisch unabhängig und für jedes k gilt

(11) $$\operatorname{mes}(E_k) \geqq \alpha I(a_{n_k+1}, \dots, a_{n_{k+1}});$$

b) für jedes k gibt es von x abhängige Indizes $\nu_k=\nu_k(x)$, $\mu_k=\mu_k(x)$ $(n_k<\nu_k\leqq \mu_k \leqq n_{k+1})$ derart, daß für $x\in E_k$

(12) $$|a_{\nu_k}\Phi_{\nu_k}(x)+\dots+a_{\mu_k}\Phi_{\mu_k}(x)| \geqq 1$$

besteht.

Wir wenden den Hilfssatz in Falle $c_i = a_i$ $(i=1, \dots, n_1)$ an, die entsprechenden Funktionen und das entsprechende Intervall bezeichnen wir mit $\Phi_1(x), \dots, \Phi_{n_1}(x)$ bzw. mit E_1.

Es sei $\varkappa(>1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_{k-1})$ und die einfachen Mengen E_k $(1 \leqq k \leqq \varkappa - 1)$ schon derart definiert sind, daß diese Funktionen orthonormiert und diese Mengen stochastisch unabhängig sind, und (11), (12) für $k=1, \dots, \varkappa-1$ bestehen.

Dann können wir das Intervall [0, 1] in endlich viele Teilentervalle $J_q = (\alpha_q, \beta_q)$ $(q=1, \dots, Q)$ einteilen, derart, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ in jedem J_q konstant sind und jede Menge E_k die Vereinigung gewisser J_q ist.

Wir wenden den Hilfssatz im Falle $c_i = a_i (i = n_{\varkappa-1}+1, \dots, n_\varkappa)$ an; die entsprechenden Funktionen und das entsprechende Intervall bezeichnen wir mit $\varphi_n(x)$ $(n_{\varkappa-1}+1 \leqq n \leqq n_\varkappa)$ bzw. mit E. Es sei

$$\Phi_n(x) = \sum_{q=1}^{Q} \varphi_n(J_q; x) \qquad (n_{\varkappa-1}+1 \leqq n \leqq n_\varkappa)$$

und

$$E_\varkappa = \bigcup_{q=1}^{Q} E(J_q),$$

wobei für ein beliebiges Intervall $I = [u, v]$

$$f(I; x) = \begin{cases} f\left(\dfrac{x-u}{v-u}\right), & u < x < v, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gesetzt wird und $G(I)$ das mit der linearen Transformation $x = (v-u)y+u$ erhaltene Bild in $[u, v]$ der Menge $G(\subseteqq [0, 1])$ bedeutet.

Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1 \leqq n \leqq n_\varkappa)$ ein orthonormiertes System, die einfachen Mengen E_k $(1 \leqq k \leqq \varkappa)$ sind stochastisch unabhängig, und (11), (12) sind auch im Falle $k = \varkappa$ erfüllt.

Das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und die Mengenfolge $\{E_k\}$ mit den geforderten Eigenschaften erhalten wir also mit Induktion.

Es sei $H = \overline{\lim}\, E_k$ $(k \to \infty)$. Auf Grund von (10) und (11), mit Anwendung des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas folgt

$$\operatorname{mes}(H) = 1.$$

Für $x \in H$ ist die Orthogonalreihe $\sum a_n \Phi_n(x)$ wegen (12) divergent.

Damit haben wir den Satz I vollständig bewiesen.

§ 2. Beweis des Satzes II

Hinlänglichkeit. Diese folgt leicht, mit Anwendung des Satzes I, aus der Bedingung (3), da die Konvergenz fast überall der Folge der m_k-ten Partialsummen der Reihe (2) äquivalent mit der Konvergenz der Orthogonalreihe

$$\sum A_k \Psi_k(x) \tag{13}$$

ist, wobei

$$\Psi_k(x) = A_k^{-1}(a_{m_k+1}\varphi_{m_k+1}(x)+\ldots+a_{m_{k+1}}\varphi_{m_{k+1}}(x)) \qquad (k=0,1,\ldots)$$

gesetzt wird. (Für $A_k=0$ soll man hier anstatt A_k^{-1} etwa 1 schreiben.)

Notwendigkeit. Wir werden Folgendes beweisen: Ist die Bedingung (3) nicht erfüllt, so gibt es ein orthonormiertes System $\{\Phi_n(x)\}$, für welches die Folge der m_k-ten Partialsummen der Reihe $\sum a_n\Phi_n(x)$ fast überall divergiert.

Ist die Bedingung (3) nicht erfüllt, so gibt es nämlich eine Indexfolge $0=n_0<\ldots<n_k<\ldots$, für die

$$\sum I(A_{n_k+1},\ldots,A_{n_{k+1}})=\infty$$

gilt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann $I(A_{n_k+1},\ldots,A_{n_{k+1}})>0$, d. h. $A^2_{n_k+1}+\ldots+A^2_{n_{k+1}}>0$ angenommen werden.

Wir wählen eine Folge $\{b_n\}$ von rationalen Zahlen derart, daß

$$\sum|b_n-a_n|<\infty \quad \text{und} \quad \sum I(B_{n_k+1},\ldots,B_{n_{k+1}})=\infty \tag{14}$$

gilt, wobei

$$B_k=\{b^2_{m_k+1}+\ldots+b^2_{m_{k+1}}\}^{1/2} \qquad (k=0,1,\ldots)$$

gesetzt wird. Dies ist offenbar möglich.

Mit der im § 1 angewandten Methode kann man ein in [0, 1] orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\psi_n(x)$ und eine stochastisch unabhängige Folge von einfachen Mengen $E_k(\subseteq[0,1])$ derart angeben, daß

$$\sum \operatorname{mes}(E_k)=\infty \tag{15}$$

besteht und es für jedes $x\in E_k$ von x abhängige Indizes $\nu_k=\nu_k(x)$, $\mu_k=\mu_k(x)$ $(n_k<\nu_k\leqq\mu_k\leqq n_{k+1})$ gibt, so daß

$$|B_{\nu_k}\psi_{\nu_k}(x)+\ldots+B_{\mu_k}\psi_{\mu_k}(x)|\geqq 1 \tag{16}$$

besteht.

Durch Induktion werden wir ein orthonormiertes System von Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ und eine Folge von einfachen Mengen F_k definieren mit den folgenden Eigenschaften:

a) die Mengen F_k sind stochastisch unabhängig und für jedes k besteht

$$\operatorname{mes}(F_k)=\operatorname{mes}(E_k); \tag{17}$$

b) zu jedem $x\in F_k$ gibt es Indizes $\nu_k=\nu_k(x)$, $\mu_k=\mu_k(x)$ $(n_k<\nu_k\leqq\mu_k\leqq n_{k+1})$ derart, daß die Ungleichung

$$|b_{m_{\nu_k}+1}\Phi_{m_{\nu_k}+1}(x)+\ldots+b_{m_{\mu_k+1}}\Phi_{m_{\mu_k+1}}(x)|\geqq 1 \tag{18}$$

besteht.

Wir schreiben die rationalen Zahlen b_n^2/B_k^2 $(m_k<n\leqq m_{k+1};\ k=0,\ldots,n_1;\ m_0=0)$ als Brüche von natürlichen Zahlen mit gemeinsamem Nenner auf:

$$b_n^2/B_k^2=p_n^{(0)}/q_0.$$

Wir teilen das Intervall [0, 1] in q_0 Teilintervalle gleicher Länge $I_\nu=[u_\nu, v_\nu]$ $(1\leqq\nu\leqq q_0)$ ein. Es sei für $m_k<n\leqq m_{k+1}$ $(k=0, \dots, n_1)$

$$\Phi_n(x)=\frac{B_k}{b_n}\sum_{\nu=p_{m_k+1}^{(0)}+\dots+p_{n-1}^{(0)}+1}^{p_{m_k+1}^{(0)}+\dots+p_n^{(0)}}\psi_k(I_\nu;x) \quad \text{und} \quad F_0=\bigcup_{\nu=1}^{q_0}E_0(I_\nu).$$

Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq m_{n_1+1})$ ein orthonormiertes System, die Menge F_0 ist einfach und besteht (17) für $k=0$. Jeder Punkt $x\in F_0$ ist in einem $E_0(I_\nu)$ enthalten $(1\leqq\nu\leqq q_0)$. Dann ist $y=\dfrac{x-u_\nu}{v_\nu-u_\nu}\in E_0$ und so gibt es auf Grund von (16) Indizes $\nu_0=\nu_0(x)$, $\mu_0=\mu_0(x)$ $(0<\nu_0\leqq\mu_0\leqq n_1)$ derart, daß

$$|B_{\nu_0}\psi_{\nu_0}(y)+\dots+B_{\mu_0}\psi_{\mu_0}(y)|\geqq 1$$

gilt. Also gilt auch

$$|B_{\nu_0}\psi_{\nu_0}(I_\nu;x)+\dots+B_{\mu_0}\psi_{\mu_0}(I_\nu;x)|\geqq 1.$$

Nach der Definition von $\Phi_n(x)$ ist aber

$$b_{m_{\nu_0}+1}\Phi_{m_{\nu_0}+1}(x)+\dots+b_{m_{\mu_0}+1}\Phi_{m_{\mu_0}+1}(x)=B_{\nu_0}\psi_{\nu_0}(I_\nu;x)+\dots+B_{\mu_0}\psi_{\mu_0}(I_\nu;x),$$

also ist (18) für $k=0$ erfüllt.

Es sei $\varkappa(\geqq 1)$ eine beliebige natürliche Zahl. Wir nehmen an, daß die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq m_{n_\varkappa+1})$ und die einfachen Mengen F_k $(0\leqq k\leqq\varkappa-1)$ schon derart definiert sind, daß die Funktionen $\Phi_n(x)$ ein orthonormiertes System bilden, die Mengen F_k stochastisch unabhängig sind, und (17), (18) für $k=0, \dots, \varkappa-1$ erfüllt sind.

Dann kann das Intervall [0, 1] in endlich viele Teilintervalle J_s $(1\leqq s\leqq\sigma)$ derart zerlegt werden, daß in jedem J_s die Funktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq m_{n_\varkappa+1})$ konstant sind und jede Menge F_k $(0\leqq k\leqq\varkappa-1)$ die Vereinigung gewisser J_s ist. Wir schreiben die endlich vielen rationalen Zahlen b_n^2/B_k^2 $(m_k<n\leqq m_{k+1}; k=n_\varkappa+1, \dots n_{\varkappa+1})$ mit gemeinsamem Nenner auf:

$$b_n^2/B_k^2=p_n^{(\varkappa)}/q_\varkappa.$$

Wir teilen jedes J_s in $q_\varkappa$ Teilintervalle gleicher Länge $J_{s,\varrho}=[u_{s,\varrho}, v_{s,\varrho}]$ $(1\leqq s\leqq\sigma$, $1\leqq\varrho\leqq q_\varkappa)$ ein und wir setzen für $m_k<n\leqq m_{k+1}$ $(k=n_\varkappa+1, \dots, n_{\varkappa+1})$

$$\Phi_n(x)=\frac{B_k}{b_n}\sum_{s=1}^{\sigma}\sum_{\varrho=p_{m_k+1}^{(\varkappa)}+\dots+p_{n-1}^{(\varkappa)}+1}^{p_{m_k+1}^{(\varkappa)}+\dots+p_n^{(\varkappa)}}\psi_k(J_{s,\varrho};x)$$

und

$$F_\varkappa=\bigcup_{s=1}^{\sigma}\bigcup_{\varrho=1}^{q_\varkappa}E_\varkappa(J_{s,\varrho}).$$

Offensichtlich bilden die Treppenfunktionen $\Phi_n(x)$ $(1\leqq n\leqq m_{n_{\varkappa+1}+1})$ ein orthonormiertes System in [0, 1]. Die Menge $F_\varkappa$ ist einfach, die Mengen F_k $(0\leqq k\leqq\varkappa)$ sind stochastisch unabhängig und (17) ist auch für $k=\varkappa$ erfüllt. Es sei $x\in F_\varkappa$. Dann ist $x\in E_\varkappa(J_{s,\varrho})$ für gewisse s und ϱ $(1\leqq s\leqq\sigma,\ 1\leqq\varrho\leqq q_\varkappa)$. Also ist

$$y=\frac{x-u_{s,\varrho}}{v_{s,\varrho}-u_{s,\varrho}}\in E_\varkappa$$

und so gibt es auf Grund von (16) von x abhängige Indizes $\nu_\varkappa=\nu_\varkappa(x)$, $\mu_\varkappa=\mu_\varkappa(x)$ $(n_\varkappa<\nu_\varkappa\leqq\mu_\varkappa\leqq n_{\varkappa+1})$, für die

$$|B_{\nu_\varkappa}\psi_{\nu_\varkappa}(y)+\ldots+B_{\mu_\varkappa}\psi_{\mu_\varkappa}(y)|\geqq 1$$

besteht. Daraus folgt

$$|B_{\nu_\varkappa}\psi_{\nu_\varkappa}(J_{s,\varrho};\,x)+\ldots+B_{\mu_\varkappa}\psi_{\mu_\varkappa}(J_{s,\varrho};\,x)|\geqq 1.$$

Nach der Definition von $\Phi_n(x)$ ist aber

$$b_{m_{\nu_\varkappa}+1}\Phi_{m_{\nu_\varkappa}+1}(x)+\ldots+b_{m_{\mu_\varkappa+1}}\Phi_{m_{\mu_\varkappa+1}}(x)=B_{\nu_\varkappa}\psi_{\nu_\varkappa}(J_{s,\varrho};\,x)+\ldots+B_{\mu_\varkappa}\psi_{\mu_\varkappa}(J_{s,\varrho};\,x),$$

also ist (18) auch für $k=\varkappa$ erfüllt.

Durch Induktion ergibt sich also das Funktionensystem $\{\Phi_n(x)\}$ und die Mengenfolge $\{F_k\}$ mit den erwähnten Eigenschaften.

Wegen (15) und (17) folgt

$$\sum \operatorname{mes}(F_k)=\infty.$$

Daraus und aus der stochastischen Unabhängigkeit der Mengen F_k erhalten wir mit Anwendung des zweiten Borel-Cantellischen Lemmas:

$$\operatorname{mes}(\overline{\lim_{k\to\infty}}F_k)=1.$$

Für $x\in\overline{\lim}\,F_k$ divergiert aber die Folge der m_k-ten Partialsummen der Reihe

$$\sum b_n\Phi_n(x)$$

wegen (18) fast überall.

Es ist leicht einzusehen, daß wegen (14) die Orthogonalreihe

$$\sum(b_n-a_n)\Phi_n(x)$$

fast überall konvergiert. Daraus folgt endlich, daß die Folge der m_k-ten Partialsummen der Reihe $\sum a_n\Phi_n(x)$ fast überall divergiert.

Damit haben wir den Satz II vollständig bewiesen.

Für die Folge der m_k-ten Partialsummen der Orthogonalreihe (2) können wir auch das Analogon der Bemerkung in § 2 beweisen.

Für eine Indexfolge $(0=)m_0<\ldots<m_k<\ldots$ betrachten wir die Mittel

$$\text{(19)}\qquad \frac{1}{k}\,[s_{m_1}(x)+\ldots+s_{m_k}(x)]\qquad(k=1,2,\ldots),$$

wo $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der Orthogonalreihe (2) bezeichnet. Offensichtlich ist die Konvergenz der Mittel (19) mit der $(C,1)$-Summierkeit der Orthogonalreihe (13) äquivalent. Ist $\sum A_k^2<\infty$, d. h. $\sum a_n^2<\infty$, so gibt es nach dem Satz von Riesz—Fischer eine quadratisch integrierbare Funktion $f(x)$, für die

$$\int_0^1 (S_k(x)-f(x))^2\,dx = \int_0^1 (s_{m_{k+1}}(x)-f(x))^2\,dx \to 0$$

gilt, wobei

$$S_k(x) = \sum_{l=0}^{k} A_l \Psi_l(x) = \sum_{n=1}^{m_{k+1}} a_n \varphi_n(x)$$

bedeutet. Nach einem Satz von ZYGMUND[11]) hat man

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} [S_k(x)-f(x)]^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} [s_{m_k}(x)-f(x)]^2 \to 0 \tag{20}$$

fast überall. Da aus (20) die Konvergenz fast überall der Mittel (19) folgt, ist die Konvergenz von (19) mit (20) fast überall äquivalent.

Die Orthogonalreihe (2) heißt *sehr stark* summierbar, wenn die Relation (20) für jede Indexfolge $\{m_k\}$ fast überall erfüllt wird. Aus dem Satz II und aus den erwähnten Sätzen von KOLMOGOROFF und KACZMARZ ergibt sich also der folgende Satz:

Damit die Orthogonalreihe (2) *für jedes orthonormierte System* $\{\varphi_n(x)\}$ *sehr stark summierbar ist, ist es notwendig und hinreichend, daß*

$$\sum I(\bar{A}_{n_l+1}(\{m_k\}), \ldots, \bar{A}_{n_{l+1}}(\{m_k\})) < \infty$$

für alle Indexfolgen $\{\mathring{m}_k\}$ *und* $\{n_k\}$ *gilt, wobei*

$$\bar{A}_l(\{m_k\}) = \{A^2_{2^l+1} + \ldots + A^2_{2^{l+1}}\}^{1/2} = \{a^2_{m_{2^l+1}+1} + \ldots + a^2_{m_{2^{l+1}+1}}\}^{1/2}$$

bedeutet.

(Eingegangen am 26. Oktober 1962)

[11]) A. ZYGMUND, Sur l'application de la première moyenne arithmétique dans la théorie des séries de fonctions orthogonales, *Fundamenta Math.*, **10** (1927), 356—362.